1.2.9 Διηλεκτρική συνάρτηση (επιδεκτικότητα, δείκτης διάθλασης)

Η παρουσία ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{B}(\mathbf{r})$ συχνότητας ω εντός ενός υλικού επάγει μια ηλεκτρική και μια μαγνητική διπολική ροπή:

$$\Delta\mathbf{p}(\mathbf{r}) \equiv \int_{\Delta V(\mathbf{r})} \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}\mathbf{r}', \quad \mathrm{d}\mathbf{r}' \equiv d^D r', \quad D = 1, 2, 3$$

$$\Delta\mathbf{m}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{2c}\int_{\Delta V(\mathbf{r})} \mathbf{r}' \times \upsilon(\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}\mathbf{r}' \quad \text{(G-CGS, στο SI θέσε } c\text{=1).}$$

Ο όγκος $\Delta V(\mathbf{r})$ γύρω από τη θέση $\mathbf{r}$ όπου περιορίζεται η ολοκλήρωση είναι πολύ μεγαλύτερος από τον όγκο ανά άτομο, αλλά πολύ μικρότερος του όγκου του στερεού. Από τις παραπάνω διπολικές ροπές ορίζουμε την *πόλωση*

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\Delta\mathbf{p}(\mathbf{r})}{\Delta V}, \tag{1.1}$$

και τη *μαγνήτιση*

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\Delta\mathbf{m}(\mathbf{r})}{\Delta V} \tag{1.2}$$

και στη συνέχεια δύο νέα βοηθητικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}), \text{ SI}, \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r}), \text{ G-CGS}, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{M}(\mathbf{r}), \text{ SI}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}) - 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{r}), \text{ G-CGS}. \tag{1.4}$$

Τα $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ και $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ είναι συνήθως ανάλογα (υπό προϋποθέσεις) των αντιστοίχων πεδίων

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}(\mathbf{r}), \text{ SI ή } \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_e\mathbf{E}(\mathbf{r}), \text{ G-CGS}, \ \chi_{e,SI} = 4\pi\chi_{e,G-CGS}, \tag{1.5}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi_m\mathbf{H}(\mathbf{r}) \text{ SI, G-CGS}, \ \chi_{m,SI} = 4\pi\chi_{\mathrm{m},G-CGS}. \tag{1.6}$$

Οι αδιάστατες ποσότητες χ_e, χ_m, ονομάζονται *ηλεκτρική* και *μαγνητική επιδεκτικότητα* (susceptibility) αντιστοίχως Η χ_m σε άλλα στερεά (που ονομάζονται *παραμαγνητικά*) είναι θετική και σε άλλα στερεά (που ονομάζονται *διαμαγνητικά*) είναι αρνητική. Λόγω των σχέσεων (1.20) και (1.21) έπονται και οι εξής γραμμικές σχέσεις:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) \equiv \epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e) \text{ SI}, \quad \epsilon = 1 + 4\pi\chi_e \text{ G-CGS}, \tag{1.7}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu\,\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad \mu = \mu_0(1+\chi_m) \text{ SI}, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi_m \text{ G-CGS}. \qquad (1.8)$$

Οι ποσότητες ϵ και μ ονομάζονται αντίστοιχα *επιτρεπτότητα* και *διαπερατότητα* (permittivity and permeability αντιστοίχως). Ισχύουν οι σχέσεις για την αδιάστατη ποσότητα που ονομάζεται *διηλεκτρική συνάρτηση*

$$(\epsilon/\epsilon_0)_{SI} = (1+\chi_e)_{SI} = \epsilon_{G-CGS} = (1+4\pi\chi_{e,G-CGS}). \qquad (1.9)$$

Η διηλεκτρική συνάρτηση συνδέεται με την αγωγιμότητα $\sigma(\omega)$ με την εξής σχέση (που συνεπάγεται ότι $\epsilon(\omega) \to \infty$ *για* $\omega \to 0$, αν $\sigma(\omega = 0) \neq 0$):

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \frac{i\sigma(\omega)}{\epsilon_0\omega} \text{ SI}, \quad \epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi i\sigma(\omega)}{\omega} \text{ G-CGS}. \qquad (1.10)$$

Ο (1.25) προκύπτει από τον ορισμό της αγωγιμότητας $\sigma \equiv \mathbf{j}/\mathbf{E}$ και από τη σχέση $\mathbf{j} = \partial\mathbf{P}/\partial t = -i\omega\mathbf{P}$, που συνδέει την πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος **j**, με τη χρονική παράγωγο της πόλωσης. Ο *δείκτης διάθλασης*, $n(\omega)$, είναι μια αδιάστατη ποσότητα που ισούται με τη τετραγωνική ρίζα του γινομένου της διηλεκτρικής συνάρτησης επί την αδιάστατη διαπερατότητα

$$n(\omega) \equiv \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)} \approx \sqrt{\epsilon(\omega)}\,. \qquad (1.11)$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Σε ένα εδροκεντρωμένο κυβικό πλέγμα με a το μήκος της ακμής της μοναδιαίας κυψελίδας, η απόσταση μεταξύ άμεσων γειτόνων είναι:
   (α) $a/\sqrt{3}$ (β) $a/\sqrt{2}$ (γ) $a/2$ (δ) $a/3$
2. Το ίδιο με το 1 αλλά για χωροκεντρωμένο πλέγμα:
   (α) $a/\sqrt{2}$ (β) a (γ) $\sqrt{3}a/2$ (δ) $2a/\sqrt{3}$
3. Στο πλέγμα του αδάμαντα με a το μήκος της ακμής της μοναδιαίας κυβικής κυψελίδας η απόσταση μεταξύ άμεσων γειτόνων είναι:
   (α) $\sqrt{3}a/4$ (β) $a/\sqrt{6}$ (γ) $2a/\sqrt{6}$ (δ) $a/4$
4. Ο αριθμός των ατόμ ων που αντιστοιχούν στη μοναδιαία κυβική κυψελίδα του πλέγματος bcc είναι:
   (α) 9 (β) 1 (γ) 2 (δ) 5
5. Ο αριθμός των ατόμων που αντιστοιχούν στη μοναδιαία κυβική κυψελίδα του πλέγματος του αδάμαντα είναι:
   (α) 4 (β) 6 (γ) 8 (δ) 12
6. Ο αριθμός των ατόμων που είναι άμεσοι γείτονες ενός ατόμου στο πλέγμα fcc είναι:
   (α) 4 (β) 8 (γ)10 (δ) 12
7. Ο όγκος που αντιστοιχεί σε ένα άτομο στο πλέγμα fcc είναι:
   (α) a^3 (β) $a^3/2$ (γ) $a^3/4$ (δ) $a^3/6$

1. Ο σίδηρος κρυσταλλώνεται στο bcc με $a = 2.87$ Å. Υπολογίστε τα d, r_a, n_a, v_a.
2. Με αφετηρία τα a, c του Ti (Πιν. 4, σελ. 254) επαληθεύστε τα d, r_a, n_a, v_a του Ti.