Γενικά για Fourier transform

Έστω η πλήρης ορθονορμαλισμένη βάση $\left|\mathbf{k}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$

Οποιαδήποτε συνάρτηση $g(\mathbf{r})$ μπορεί να γραφεί ως σταθμισμένο άθροισμα των $\left|\mathbf{k}\right\rangle$

$g(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \left|\mathbf{k}\right\rangle$, όπου $c_{\mathbf{k}} = \left\langle c_{\mathbf{k}} \middle| g \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} g(\mathbf{r})$. Λαμβάνοντας υπόψη τις τελευταίες δύο σχέσεις και το ότι $\sum_{\mathbf{k}} \ldots \to \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \ldots$ για οτιδήποτε, έχουμε τελικά

$$g(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{g}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad \text{όπου} \quad \tilde{g}_{\mathbf{k}} = \sqrt{V} c_{\mathbf{k}} = \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} g(\mathbf{r})$$

Fourier transform of 1/r etc

Η $\varphi(r) = \frac{q}{r}$ ικανοποιει την εξισωση του Poisson

$\nabla^2 \varphi = -4\pi q \delta(\mathbf{r})$ που εχει μετασχηματισμενη Fourier την $\left(\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr}\right)$

$$-k^2 \tilde{\varphi}(k) = -4\pi q \;\Leftrightarrow\; \tilde{\varphi}(k) = \frac{4\pi q}{k^2}$$

Η $\varphi(r) = \frac{q}{r} e^{-k_{tf} r}$ για $r \neq 0$ ικανοποιεί τη σχέση $\nabla^2 f - k_{TF}^2 f = 0$ και επομενως

$\nabla^2 f - k_{TF}^2 f = -4\pi q \delta(\mathbf{r})$ με μετασχηματισμενη Fourier

$$-k^2 \tilde{f}(k) - k_{TF}^2 \tilde{f}(k) = -4\pi q \;\Leftrightarrow\; \tilde{f}(k) = \frac{4\pi q}{k^2 + k_{TF}^2}$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{\tilde{\varphi}(k)}{\epsilon(k)} \;\Rightarrow\; \epsilon(k) = 1 + \frac{k_{TF}^2}{k^2}$$